TD N°3

Réponse temporelle des systèmes linéaires

Exercice 1:

a) Déterminer la fonction de transfert reliant la sortie $v_2(t)$ à l'entrée $v_1(t)$ du circuit électrique donné par la figure 1.

b) Pour C=2µF et $R_1=R_2=1M\Omega$, calculer le gain statique K ainsi que la constante du temps τ.

c) Donner la réponse indicielle de ce système.

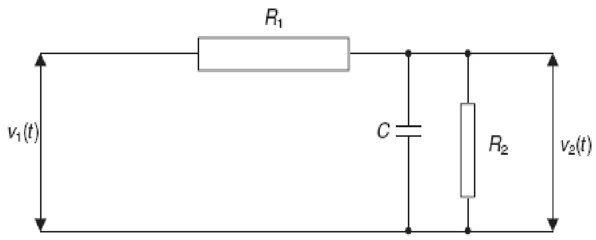


Figure 1

Exercice 2:

Un système linéaire est caractérisé par l'équation

$$0.5\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=15e(t) \qquad (1)$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert du système, quels sont le type, l'ordre, le gain et la ou les constantes de temps de ce système?
2. l'entrée appliquée est donnée en **figure 2**(le système étant initialement au repos)
   - donner l'expression de s(t) en fonction de x
   - trouver x pour qu'à t=0.1s la réponse atteigne sa finale et ne le quitte pas

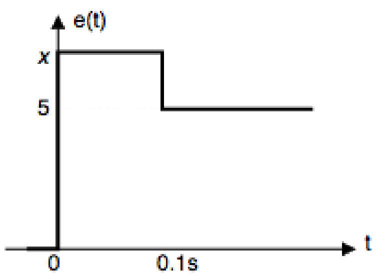


Figure 2

Exercice 3

On considère le circuit RLC (Figure3)

Entrée : Tension aux bornes du circuit.

Sortie : Tension aux bornes du condensateur.

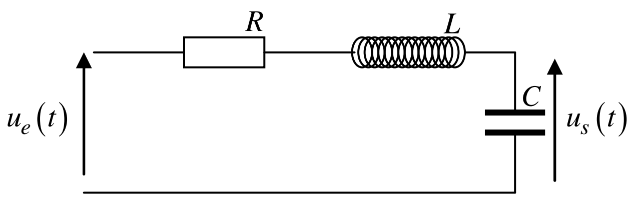


Figure 3

1- Ecrire l'équation différentielle régissant la dynamique de sortie de ce système.
2- Donner la fonction de transfert
3- Donner l'expression du gain statique, la pulsation naturelle et le coefficient d'amortissement en fonction de R, L et C

4- On supposant que z<1, tracer l'allure de la réponse temporelle du système à un échelon de tension (0V – EV).

Solution de TD 3

EX1 :

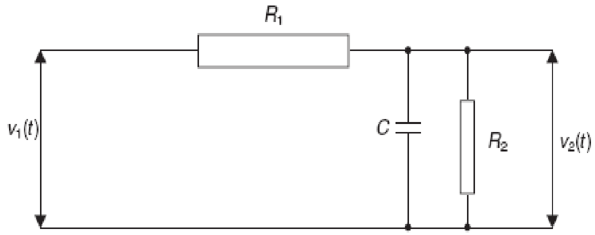


Figure 1.

1) La fonction de transfert reliant la sortie $v_2(t)$ à l'entrée $v_1(t)$ du circuit électrique :

$$V_1 - V_2 = R_1 i = R_1(i_1 + i_2)$$

$$V_1 - V_2 = R_1\left(C\frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{R_2}\right)$$

$$V_1(t) = V_2(t)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 C\,\frac{dV_2(t)}{dt}$$

La transformé de Laplace de cette équation :

$$V_1(p) = V_2(p)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 Cp\, V_2(p)$$

$$V_1(p) = \left[\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 Cp\right] V_2(p)$$

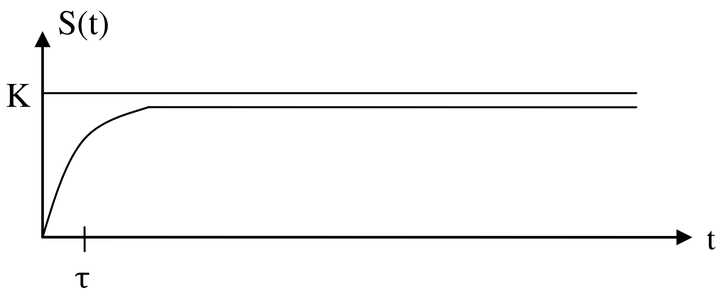
$$\frac{S}{E} = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 Cp} = \frac{\frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}}{1 + \frac{R_1 C}{1 + \frac{R_1}{R_2}}.p} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2) Pour C=2µF et R_1=R_2=1MΩ :

Le gain statique $K = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}} = \frac{1}{2}$

La constante du temps $\tau = \frac{R_1 C}{1+\frac{R_1}{R_2}} = 1s$

3) la réponse indicielle de ce système :



EX 2:

1) Un système linéaire est caractérisé par l'équation

$$0{,}5.\frac{ds}{dt} + s(t) = 15.e(t)$$

L'expression de la fonction de transfert du système :

$$TL\left[0,5.\frac{ds}{dt} + s(t)\right] = TL\left[15.e(t)\right]$$

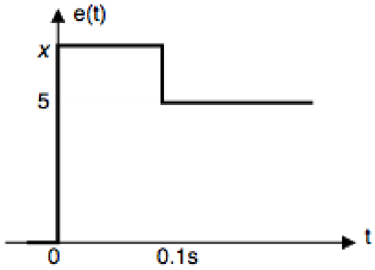
$$0,5.p \cdot S(p) + S(p) = 15.E(p)$$

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{15}{1+0,5p}$$

- Le type d'une fonction de transfert est le nombre d'intégrateur inclus dans la fonction de transfert ; il correspond au nombre de fois ou l'on peut factoriser p au dénominateur de cette fonction de transfert. Il s'agit donc, ici, d'une fonction de transfert de type 0.
- L'ordre d'une fonction de transfert est le degré du dénominateur de cette fonction de transfert. C'est aussi l'ordre de l'équation différentielle reliant la sortie et l'entrée. Ici, ordre 1.
- Le gain statique est obtenu en faisant $p \to 0$. Le gain statique est $K = 15$.
- La constante de temps vaut $\tau = 0,5s$.

2) L'entrée appliquée est donnée en figure 2 (le système étant initialement au repos).

- l'expression de s(t) en fonction de x :



La linéarité de l'équation différentielle implique le principe de superposition. La réponse du système à la somme de 2 signaux d'entrée distincts est la somme des réponses de ce système à chacun de ces 2 signaux.

Ici, il faut voir (on peut voir…) que le signal d'entrée peut être considéré comme la somme de 2 échelons décalés dans le temps de $0,1s$

- le 1[er], à $t = 0s$, d'amplitude x.
- Le second, à $t = 0,1s$, d'amplitude $(5-x)$ [et non pas 5 !!]

$$e(t) = x \cdot \Gamma(t) + (5-x) \cdot \Gamma(t-0,1)$$

On connaît l'expression de la réponse pour chacun de ces 2 signaux. On en déduit l'expression complète :

$$s(t) = 15x\left(1-e^{-\frac{t}{0,5}}\right) \cdot \Gamma(t) + 15(5-x)\left(1-e^{-\frac{(t-0,1)}{0,5}}\right) \cdot \Gamma(t-0,1)$$

Lorsque $t \to +\infty$, $s(t) \to 15.5 = 75$

Il vient alors

$$s(0,1) = 15x\left(1-e^{-\frac{0,1}{0,5}}\right) \cdot \Gamma(0,1) + 15(5-x)\left(1-e^{-\frac{(0,1-0,1)}{0,5}}\right) \cdot \Gamma(0,1-0,1)$$

$$s(0,1) = 15x\left(1-e^{-0,2}\right)$$

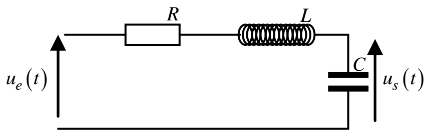
- Pour que la réponse atteigne sa valeur finale dès $0,1s$, on doit nécessairement avoir :

$$s(0,1) = 75 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{1-e^{-0,2}}$$

On peut vérifier que si l'on remplace x par $\frac{5}{1-e^{-0,2}}$ dans l'équation 1, on obtient $s(t) = 75$ indépendant du temps à partir de $0,1s$.

EX 3:

1) Les équations différentielles régissant la dynamique des sorties de ce système :



La loi des mailles donne : $u_e = u_R + u_L + u_C$

Avec $u_R = R \cdot i$; $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ et $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$

Il vient donc rapidement : $$LC \cdot \frac{d^2u_c}{dt^2} + RC \cdot \frac{du_c}{dt} + u_C = u_e$$

2) La function de transfert:

Il vient immédiatement $\left[LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1\right] \cdot u_C(p) = u_e(p)$

$$\frac{u_C(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1}$$

3) On procède par identification terme à terme des coefficients des fonctions de transfert

- Système électrique : $$\frac{u_C(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{LC \cdot p^2 + RC \cdot p + 1}$$

$$\begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \dfrac{\omega_n}{2} \cdot RC \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} Gain\ statique = 1 \\ \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \dfrac{R}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}}$$

4) On supposant que $\xi < 1$, l'allure de la réponse temporelle du système à un échelon de tension (0V – EV).

On ne dispose d'aucune valeur numérique, il s'agit donc de tracer l'allure de la réponse obtenue qui doit être bien connue…